

# La modellizzazione della dipendenza delle perdite operative e il suo impatto sul capitale regolamentare

**Sandra Paterlini**

European Business School, Wiesbaden, GER

[sandra.paterlini@ebs.edu](mailto:sandra.paterlini@ebs.edu)

**ABI Basel III,**

27 Giugno 2013

Joint work with: **Eike Brechmann** and **Claudia Czado**, TUM Munich, GER

- 1 Zero inflation:** Se le perdite sono modellate con frequenza settimanale o mensile, può accadere che non vi siano perdite osservate per alcune Business Lines (BLs) o Event Types (ETs). Un **numero eccessivo di perdite uguali a zero** viene denominato **zero inflation**.
- 2 Heavy tails:** le distribuzioni marginali delle perdite operative possono presentare **code grasse**.
- 3 Eterogeneità degli eventi & Dipendenza:** Differenti BLs o ETs mostrano differenti livelli di dipendenza a coppie. La dipendenza può inoltre essere caratterizzata da **dipendenza nelle code** (tail dependence).

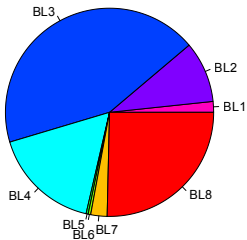
- 1 Zero inflation:** Se le perdite sono modellate con frequenza settimanale o mensile, può accadere che non vi siano perdite osservate per alcune Business Lines (BLs) o Event Types (ETs). Un **numero eccessivo di perdite uguali a zero** viene denominato **zero inflation**.
- 2 Heavy tails:** le distribuzioni marginali delle perdite operative possono presentare **code grasse**.
- 3 Eterogeneità degli eventi & Dipendenza:** Differenti BLs o ETs mostrano differenti livelli di dipendenza a coppie. La dipendenza può inoltre essere caratterizzata da **dipendenza nelle code** (tail dependence).

- 1 Zero inflation:** Se le perdite sono modellate con frequenza settimanale o mensile, può accadere che non vi siano perdite osservate per alcune Business Lines (BLs) o Event Types (ETs). Un **numero eccessivo di perdite uguali a zero** viene denominato **zero inflation**.
- 2 Heavy tails:** le distribuzioni marginali delle perdite operative possono presentare **code grasse**.
- 3 Eterogeneità degli eventi & Dipendenza:** Differenti BLs o ETs mostrano differenti livelli di dipendenza a coppie. La dipendenza può inoltre essere caratterizzata da **dipendenza nelle code** (tail dependence).

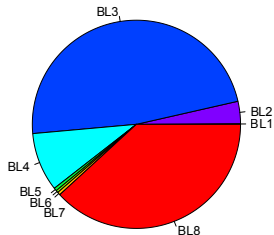
- 1 Zero inflation:** Se le perdite sono modellate con frequenza settimanale o mensile, può accadere che non vi siano perdite osservate per alcune Business Lines (BLs) o Event Types (ETs). Un **numero eccessivo di perdite uguali a zero** viene denominato **zero inflation**.
- 2 Heavy tails:** le distribuzioni marginali delle perdite operative possono presentare **code grasse**.
- 3 Eterogeneità degli eventi & Dipendenza:** Differenti BLs o ETs mostrano differenti livelli di dipendenza a coppie. La dipendenza può inoltre essere caratterizzata da **dipendenza nelle code** (tail dependence).

# I dati DIPO - Zero Inflation

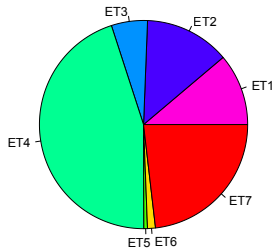
Proportion of aggregate losses per BL



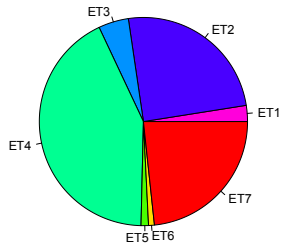
Proportion of numbers of losses per BL

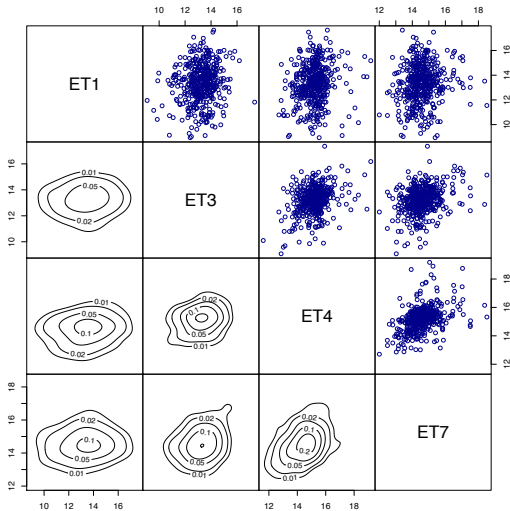


Proportion of aggregate losses per ET



Proportion of numbers of losses per ET

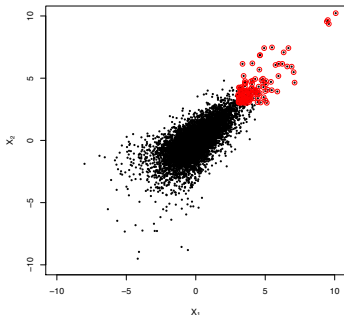




Perdite aggregate osservate  
in scala logaritmica di 4  
ETs:

- ▶ Le dipendenze a coppia  
sono **qualitativamente  
abbastanza differenti.**

Si ha **Upper Tail Dependence** quando perdite elevate si manifestano **congiuntamente**, non indipendentemente.





L'eterogeneità delle perdite operative è alla base del requisito regolamentare di una modellizzazione separata delle 56 **combinazioni di event-type/business-line**.

		Business Lines		
		Corporate Finance	...	Retail Brokerage
Event Types	Internal Fraud	$S_1$	...	$S_8$
	⋮	⋮	⋮	⋮
	Execution, Delivery & Process Management	$S_{49}$	...	$S_{56}$

La quantità di interesse è

$$\text{VaR}_{.999}(L) = \text{VaR}_{.999} \left( \sum_{j=1}^d S_j \right); \quad (1)$$

dove  $L = \sum_{j=1}^d S_j$  è la perdita operativa totale. È chiaramente influenzato dalle **dipendenze** fra le celle della matrice delle 56 combinazioni.

Tuttavia, Basilea II impone di calcolare il **Total Risk Capital** (capitale a rischio totale) come

$$\text{TRC} = \sum_{j=1}^d \text{VaR}_{.999}(S_j); \quad (2)$$

- Questo corrisponde all'assunzione di **comonotonicità** fra le celle.
- Possibili benefici dovuti alla **diversificazione** sono ignorati.

La quantità di interesse è

$$\text{VaR}_{.999}(L) = \text{VaR}_{.999} \left( \sum_{j=1}^d S_j \right); \quad (1)$$

dove  $L = \sum_{j=1}^d S_j$  è la perdita operativa totale. È chiaramente influenzato dalle **dipendenze** fra le celle della matrice delle 56 combinazioni.

Tuttavia, Basilea II impone di calcolare il **Total Risk Capital** (capitale a rischio totale) come

$$\text{TRC} = \sum_{j=1}^d \text{VaR}_{.999}(S_j); \quad (2)$$

- Questo corrisponde all'assunzione di **comonotonicità** fra le celle.
- Possibili benefici dovuti alla **diversificazione** sono ignorati.

La quantità di interesse è

$$\text{VaR}_{.999}(L) = \text{VaR}_{.999} \left( \sum_{j=1}^d S_j \right); \quad (1)$$

dove  $L = \sum_{j=1}^d S_j$  è la perdita operativa totale. È chiaramente influenzato dalle **dipendenze** fra le celle della matrice delle 56 combinazioni.

Tuttavia, Basilea II impone di calcolare il **Total Risk Capital** (capitale a rischio totale) come

$$\text{TRC} = \sum_{j=1}^d \text{VaR}_{.999}(S_j); \quad (2)$$

- Questo corrisponde all'assunzione di **comonotonicità** fra le celle.
- Possibili benefici dovuti alla **diversificazione** sono ignorati.

La quantità di interesse è

$$\text{VaR}_{.999}(L) = \text{VaR}_{.999} \left( \sum_{j=1}^d S_j \right); \quad (1)$$

dove  $L = \sum_{j=1}^d S_j$  è la perdita operativa totale. È chiaramente influenzato dalle **dipendenze** fra le celle della matrice delle 56 combinazioni.

Tuttavia, Basilea II impone di calcolare il **Total Risk Capital** (capitale a rischio totale) come

$$\text{TRC} = \sum_{j=1}^d \text{VaR}_{.999}(S_j); \quad (2)$$

- Questo corrisponde all'assunzione di **comonotonicità** fra le celle.
- Possibili benefici dovuti alla **diversificazione** sono ignorati.

La quantità di interesse è

$$\text{VaR}_{.999}(L) = \text{VaR}_{.999} \left( \sum_{j=1}^d S_j \right); \quad (1)$$

dove  $L = \sum_{j=1}^d S_j$  è la perdita operativa totale. È chiaramente influenzato dalle **dipendenze** fra le celle della matrice delle 56 combinazioni.

Tuttavia, Basilea II impone di calcolare il **Total Risk Capital** (capitale a rischio totale) come

$$\text{TRC} = \sum_{j=1}^d \text{VaR}_{.999}(S_j); \quad (2)$$

- Questo corrisponde all'assunzione di **comonotonicità** fra le celle.
- Possibili benefici dovuti alla **diversificazione** sono ignorati.

- Sotto particolari condizioni qualificanti, le banche possono modellare in modo esplicito le **dipendenze** e calcolare direttamente

$$\text{VaR}_{.999}(L) = \text{VaR}_{.999} \left( \sum_{j=1}^d S_j \right);$$

- Possiamo quantificare l'effetto della modellizzazione della dipendenza mediante il cosiddetto **Rapporto di Diversificazione**:

$$\text{Div}_{.999} := \frac{\text{VaR}_{.999}(\sum_{j=1}^d S_j) - \sum_{j=1}^d \text{VaR}_{.999}(S_j)}{\sum_{j=1}^d \text{VaR}_{.999}(S_j)};$$

- Sotto particolari condizioni qualificanti, le banche possono modellare in modo esplicito le **dipendenze** e calcolare direttamente

$$\text{VaR}_{.999}(L) = \text{VaR}_{.999} \left( \sum_{j=1}^d S_j \right);$$

- Possiamo quantificare l'effetto della modellizzazione della dipendenza mediante il cosiddetto **Rapporto di Diversificazione**:

$$\text{Div}_{.999} := \frac{\text{VaR}_{.999}(\sum_{j=1}^d S_j) - \sum_{j=1}^d \text{VaR}_{.999}(S_j)}{\sum_{j=1}^d \text{VaR}_{.999}(S_j)};$$



- Oltre ad avere un modello piú realistico e accurato, quali sono gli **effetti sul total risk capital** della esplicita modellizzazione della dipendenza?

# In teoria: VaR e Subadditività

Il Rapporto di Diversificazione può essere

- **NEGATIVO** : Per distribuzioni ellittiche, la somma dei singoli VaRs costituisce un limite superiore e quindi una sorta di worst-case scenario per  $\text{VaR}_\alpha(L)$ ,

$$\text{VaR}_\alpha\left(\sum_{j=1}^d S_j\right) \leq \sum_{j=1}^d \text{VaR}_\alpha(S_j) \quad (3)$$

- **POSITIVO** : Per distribuzioni non ellittiche, si può verificare che

$$\text{VaR}_\alpha\left(\sum_{j=1}^d S_j\right) > \sum_{j=1}^d \text{VaR}_\alpha(S_j) \quad (4)$$

a seguito della **manca** di **subadditività** del VaR (Artzner et al. 1999).

- La modellizzazione della dipendenza è un'area in evoluzione. Vi sono significative differenze negli approcci adottati dalle banche e questo può condurre a differenze spurie (BCBS 2011).
- Secondo il 2008 Loss Data Collection Exercise (BCBS 2009) ,
  - Fra le banche AMA solo il 17% usa la **matrice di correlazione**, mentre il 43% utilizza le **copule** (con preferenza per la **Gaussiana**, i.e. 83%) e il 31% altri metodi.
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in un modesto aumento (8.3%) del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena indipendenza (i.e. correlazione: 0 ).
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in una diminuzione del 22.4% del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena dipendenza (i.e. correlazione: 1), dovuta all'effetto di diversificazione.

- La modellizzazione della dipendenza è un'area in evoluzione. Vi sono significative differenze negli approcci adottati dalle banche e questo può condurre a differenze spurie (BCBS 2011).
- Secondo il 2008 Loss Data Collection Exercise (BCBS 2009) ,
  - Fra le banche AMA solo il 17% usa la **matrice di correlazione**, mentre il 43% utilizza le **copule** (con preferenza per la **Gaussiana**, i.e. 83%) e il 31% altri metodi.
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in un modesto aumento (8.3%) del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena indipendenza (i.e. correlazione: 0 ).
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in una diminuzione del 22.4% del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena dipendenza (i.e. correlazione: 1), dovuta all'effetto di diversificazione.

- La modellizzazione della dipendenza è un'area in evoluzione. Vi sono significative differenze negli approcci adottati dalle banche e questo può condurre a differenze spurie (BCBS 2011).
- Secondo il 2008 Loss Data Collection Exercise (BCBS 2009) ,
  - Fra le banche AMA solo il 17% usa la **matrice di correlazione**, mentre il 43% utilizza le **copule** (con preferenza per la **Gaussiana**, i.e. 83%) e il 31% altri metodi.
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in un modesto aumento (8.3%) del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena indipendenza (i.e. correlazione: 0 ).
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in una diminuzione del 22.4% del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena dipendenza (i.e. correlazione: 1), dovuta all'effetto di diversificazione.

- La modellizzazione della dipendenza è un'area in evoluzione. Vi sono significative differenze negli approcci adottati dalle banche e questo può condurre a differenze spurie (BCBS 2011).
- Secondo il 2008 Loss Data Collection Exercise (BCBS 2009) ,
  - Fra le banche AMA solo il 17% usa la **matrice di correlazione**, mentre il 43% utilizza le **copule** (con preferenza per la **Gaussiana**, i.e. 83%) e il 31% altri metodi.
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in un modesto aumento (8.3%) del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena indipendenza (i.e. correlazione: 0 ).
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in una diminuzione del 22.4% del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena dipendenza (i.e. correlazione: 1), dovuta all'effetto di diversificazione.

- La modellizzazione della dipendenza è un'area in evoluzione. Vi sono significative differenze negli approcci adottati dalle banche e questo può condurre a differenze spurie (BCBS 2011).
- Secondo il 2008 Loss Data Collection Exercise (BCBS 2009) ,
  - Fra le banche AMA solo il 17% usa la **matrice di correlazione**, mentre il 43% utilizza le **copule** (con preferenza per la **Gaussiana**, i.e. 83%) e il 31% altri metodi.
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in un modesto aumento (8.3%) del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena indipendenza (i.e. correlazione: 0 ).
  - La modellizzazione della dipendenza della banca mediana risulta in una diminuzione del 22.4% del requisito di capitale rispetto all'assunzione di piena dipendenza (i.e. correlazione: 1), dovuta all'effetto di diversificazione.

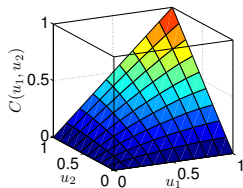
- Oltre ad avere un modello piú realistico e accurato, quali sono gli effetti sul total risk capital della esplicita modellizzazione della dipendenza?
- Quali sono gli **strumenti** adeguati per modellare la dipendenza delle perdite operative?



Invece di ridurre la dipendenza ad un singolo numero, la copula modella la *struttura* della dipendenza di una distribuzione congiunta.

Una copula è una distribuzione multivariata definita in  $[0, 1]^d$  con distribuzioni marginali uniformi.

Il teorema centrale risale a (Sklar 1959) e afferma che



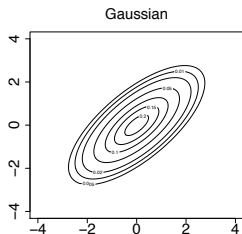
$$F_{i,j}(s_i, s_j) = C(\underbrace{F_i(s_i)}_{u_i}, \underbrace{F_j(s_j)}_{u_j}),$$

dove  $C$  denota la copula di  $S_i$  e  $S_j$  e  $U_i, U_j \sim U(0, 1)$ .

# Copula e Tail Dependence

La dipendenza nelle code tiene conto della dipendenza —possibilmente non lineare—fra estremi.

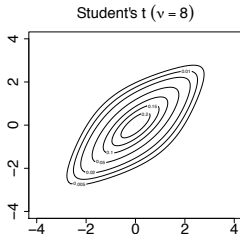
Differenti copule implicano differenti strutture di dipendenza nelle code.



**Gaussian copula:**

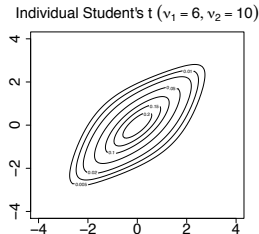
No

Tail dependence



**Student's t copula:**

Tail dependence



**Individual Student's t:**

Heterogeneous

Tail dependence

Il  $\tau$  di Kendall è sempre uguale a 0.5.

- Costruire un approccio di modellizzazione **flessibile** e **multivariata** (a **8- e 7- dimensioni**) per le perdite operative.
- Paragonare differenti modelli di **dipendenza**.
- Valutare l'impatto della **dipendenza nelle code**.
- Valutare gli effetti sulle **stime del Total Risk Capital** e i benefici da **diversificazione**.

Il modello multivariato zero-inflated per le perdite operative è costituito da 3 componenti:

- 1 Distribuzioni marginali delle perdite operative
- 2 Copula per modellare la dipendenza delle perdite positive
- 3 Distribuzione multivariata binaria delle perdite, che considera esplicitamente quelle nulle

Per dettagli si veda: Brechmann, Czado e Paterlini (2013)

[http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=2252481](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2252481)

- Periodo: Gennaio 2003 – Giugno 2011.
- Modellizzazione settimanale: 451 osservazioni.
- 107'074 perdite operative
- Valore Soglia: 5000 Euro.
- ▶ Costruiamo modelli multivariati zero inflation di dipendenza delle 8 BLs e dei 7 ETs.

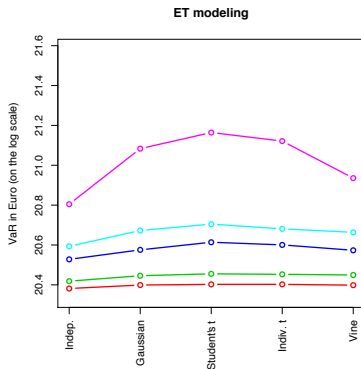
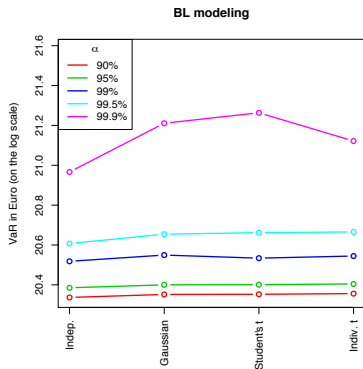
- Le copule Student's t riportano un adattamento ottimale. La **Individual Student's t copula** è quella che statisticamente risulta più attraente per modellare le perdite operative positive.
- I **gradi di libertà** delle copula individual Student's **variano** in modo considerevole:
  - Student's t: 42.04 (BL), 54.78 (ET)
  - Individual Student's t: 6.30–339.77 (BL), 7.62–319.37 (ET)
- Il livello totale di **dipendenza nelle code** è vicino a zero in tutti i modelli.

- Lo scopo principale di un modello multivariato delle perdite operative è una stima accurata del total risk capital:

$$\text{VaR}_{.999}(L) = Q_L(.999)$$

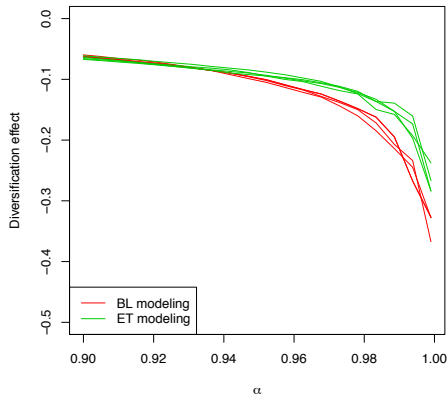
dove  $L = \sum_{j=1}^d S_j$  é la perdita operativa totale e  $Q_L$  la sua funzione quantile.

- Vogliamo valutare le differenze nelle stime del total risk capital fra i modelli considerati rispetto all'assunzione di **indipendenza** e di **perfetta dipendenza**



- BLs/ETs sono indipendenti → VaR più piccolo.
- VaR Student's t copula → VaR più grande.
- Individual Student's t copula → VaR minore della Student's t copula  
⇒ La "standard" Student's t copula **sembra sovrastimare il rischio**.
- Per  $\alpha = 99.9\%$ , abbiamo un incremento minimo del 17% e massimo del 43% rispetto all'assunzione di indipendenza.





$$\text{Div}_\alpha = \frac{\text{VaR}_\alpha(\sum_{j=1}^d S_j) - \sum_{j=1}^d \text{VaR}_\alpha(S_j)}{\sum_{j=1}^d \text{VaR}_\alpha(S_j)}$$

con  $\alpha \in [90\%, 99.9\%]$

■ **Beneficio da diversificazione:**

Per  $\alpha = 99.9\%$ : fino al 38%!

- La (modellizzazione della) **dipendenza nelle code** porta a differenze...  
...anche quando è **molto piccola** e...  
...in modo particolare per  $\alpha = 99.9\%$
- La Student's t copula fornisce le stime più elevate del VaR, mentre la Individual Student's t copula consente una modellizzazione più flessibile della dipendenza
- Potenziali **benefici da diversificazione** (fino al 38%) mediante la modellizzazione esplicita e flessibile della dipendenza.

- La (modellizzazione della) **dipendenza nelle code** porta a differenze...  
...anche quando è **molto piccola** e...  
...in modo particolare per  $\alpha = 99.9\%$
- La Student's t copula fornisce le stime più elevate del VaR, mentre la Individual Student's t copula consente una modellizzazione più flessibile della dipendenza
- Potenziali **benefici da diversificazione** (fino al 38%) mediante la modellizzazione esplicita e flessibile della dipendenza.

- La (modellizzazione della) **dipendenza nelle code** porta a differenze...  
...anche quando è **molto piccola** e...  
...in modo particolare per  $\alpha = 99.9\%$
- La Student's t copula fornisce le stime più elevate del VaR, mentre la Individual Student's t copula consente una modellizzazione più flessibile della dipendenza
- Potenziali **benefici da diversificazione** (fino al 38%) mediante la modellizzazione **esplicita** e **flessibile** della dipendenza.

Artzner, P., F. Delbaen, J. Eber, and D. Heath (1999).  
Coherent Measures of Risk.  
*Mathematical Finance* 9, 203–228.

BCBS (2009).  
Results from the 2008 Loss Data Collection Exercise.  
Technical report, Bank for International Settlements.

BCBS (2011).  
Operational risk – Supervisory guidelines for the advanced measurement approaches.  
Technical report, Bank for International Settlements.

Dalla Valle, L., D. Fantazzini, and P. Giudici (2008).  
Copulae and operational risks.  
*International Journal of Risk Assessment and Management* 9(3), 238–257.

Giacometti, R., S. Rachev, A. Chernobai, and M. Bertocchi (2008).  
Aggregation issues in operational risk.  
*Journal of Operational Risk* 3(3), 3–23.

Sklar, A. (1959).  
Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges.  
*Publications de l'Institut de Statistique de L'Université de Paris* 8, 229–231.