

Il calcolo del CVA/DVA/FVA ed una sua semplice estensione al XVA

Roberto Torresetti, Lorenzo Giada (*)
Risk Management, Banca Carige

Roma, 23-24 Giugno 2015

(*) Le opinioni qui espresse sono proprie degli Autori e non riflettono necessariamente le opinioni dei datori di lavoro presenti e passati.

Bilateral CVA-DVA pricing

$$\mathbb{E}_t \left\{ \Pi_B^D(t, T) \right\} = \mathbb{E}_t \left\{ \Pi_B(t, T) \right\} + DVA_B(t) - CVA_B(t)$$

$$DVA_B(t) = \mathbb{E}_t \left\{ LGD_B \cdot \mathbf{1}(t < \tau^{1st} = \tau_B < T) \cdot D(t, \tau_B) \cdot [-NPV_B(\tau_B)]^+ \right\}$$

$$CVA_B(t) = \mathbb{E}_t \left\{ LGD_C \cdot \mathbf{1}(t < \tau^{1st} = \tau_C < T) \cdot D(t, \tau_C) \cdot [NPV_B(\tau_C)]^+ \right\}$$

Ulteriore livello di complessità/opzionalità rispetto al pricing senza counterparty risk

$$[-NPV_B(\tau_B)]^+$$

$$[NPV_B(\tau_C)]^+$$

Modello ibrido X-credito (e tasso)

$$\mathbf{1}(t < \tau^{1st} = \tau_B < T) \cdot D(t, \tau_B) \cdot [-NPV_B(\tau_B)]^+$$

$$\mathbf{1}(t < \tau^{1st} = \tau_C < T) \cdot D(t, \tau_C) \cdot [NPV_B(\tau_C)]^+$$

Collaterale? Funding?

Framework più generale e realistico per il pricing inclusivo di CVA, DVA, collateral e funding (*):
Pallavicini A, Perini D, Brigo D, 2011, *“Funding Valuation Adjustment: a consistent framework including CVA, DVA, collateral, netting rules and re-hypothecation”*

Risk neutral measure discounting di tutti i flussi di cassa

a → derivato (coupons, ...);

b → collaterale;

c → funding;

d → flussi in occasione del default.

$$\begin{aligned}\bar{V}_t(C, F) &= \mathbb{E}_t[\Pi(t, T \wedge \tau) + \gamma(t, T \wedge \tau; C) + \varphi(t, T \wedge \tau; F)] \\ &+ \mathbb{E}_t[1_{\{t < \tau < T\}} D(t, \tau) \theta_\tau(C, \varepsilon)].\end{aligned}$$

a: derivato: sconto dei flussi del derivato fino a scadenza oppure al default (proprio o della controparte: first-to-default)

$$\bar{V}_t(C; F) := \mathbb{E}_t[\Pi(t, T \wedge \tau) + \dots]$$

b: collaterale:

$$\gamma(t, T; C) := \sum_{k=1}^{n-1} 1_{\{t \leq t_k < T\}} D(t, t_k) \left(C_{t_k} - C_{t_k}^- \frac{P_{t_k}(t_{k+1})}{P_{t_k}^{c^-}(t_{k+1})} - C_{t_k}^+ \frac{P_{t_k}(t_{k+1})}{P_{t_k}^{c^+}(t_{k+1})} \right), \quad P_t^{c^\pm}(T) := \frac{1}{1 + (T-t)c_t^\pm(T)}.$$

Ovvero, in parentesi:

$$C_{t_k} (c_{t_k}^\pm(t_{k+1}) - r)(t_{k+1} - t_k) P_{t_k}(t_{k+1})$$

c: funding.

senza re-hypothecation $F_t = \bar{V}_t(0; F) - H_t,$

con re-hypothecation $F_t = \bar{V}_t(C; F) - C_t - H_t,$

$$\varphi(t, T; F) := \sum_{j=1}^{m-1} 1_{\{t \leq t_j < T\}} D(t, t_j) \left(F_{t_j} - F_{t_j}^- \frac{P_{t_j}(t_{j+1})}{P_{t_j}^{f^-}(t_{j+1})} - F_{t_j}^+ \frac{P_{t_j}(t_{j+1})}{P_{t_j}^{f^+}(t_{j+1})} \right), \quad f_t^\pm(T) := \frac{1}{T-t} \left(\frac{1}{P_t^{f^\pm}(T)} - 1 \right).$$

d: flussi in occasione del default (ε close out amount)

$$\begin{aligned}
 \theta_{\tau}(C, \varepsilon) := & + 1_{\{\tau=\tau_C < T\}} D(t, \tau) 1_{\{\varepsilon_{I,\tau} < 0\}} 1_{\{C_{\tau-} > 0\}} (\varepsilon_{I,\tau} - C_{\tau-}) \\
 & + 1_{\{\tau=\tau_C < T\}} D(t, \tau) 1_{\{\varepsilon_{I,\tau} < 0\}} 1_{\{C_{\tau-} < 0\}} ((\varepsilon_{I,\tau} - C_{\tau-})^{-} + R'_C (\varepsilon_{I,\tau} - C_{\tau-})^{+}) \\
 & + 1_{\{\tau=\tau_C < T\}} D(t, \tau) 1_{\{\varepsilon_{I,\tau} > 0\}} 1_{\{C_{\tau-} > 0\}} ((\varepsilon_{I,\tau} - C_{\tau-})^{-} + R_C (\varepsilon_{I,\tau} - C_{\tau-})^{+}) \\
 & + 1_{\{\tau=\tau_C < T\}} D(t, \tau) 1_{\{\varepsilon_{I,\tau} > 0\}} 1_{\{C_{\tau-} < 0\}} (R_C \varepsilon_{I,\tau} - R'_C C_{\tau-}) \\
 & + 1_{\{\tau=\tau_I < T\}} D(t, \tau) 1_{\{\varepsilon_{C,\tau} > 0\}} 1_{\{C_{\tau-} < 0\}} (\varepsilon_{C,\tau} - C_{\tau-}) \\
 & + 1_{\{\tau=\tau_I < T\}} D(t, \tau) 1_{\{\varepsilon_{C,\tau} > 0\}} 1_{\{C_{\tau-} > 0\}} ((\varepsilon_{C,\tau} - C_{\tau-})^{+} + R'_I (\varepsilon_{C,\tau} - C_{\tau-})^{-}) \\
 & + 1_{\{\tau=\tau_I < T\}} D(t, \tau) 1_{\{\varepsilon_{C,\tau} < 0\}} 1_{\{C_{\tau-} < 0\}} ((\varepsilon_{C,\tau} - C_{\tau-})^{+} + R_I (\varepsilon_{C,\tau} - C_{\tau-})^{-}) \\
 & + 1_{\{\tau=\tau_I < T\}} D(t, \tau) 1_{\{\varepsilon_{C,\tau} < 0\}} 1_{\{C_{\tau-} > 0\}} (R_I \varepsilon_{C,\tau} - R'_I C_{\tau-}).
 \end{aligned}$$

Ovvero:

$$\begin{aligned}
 \theta_{\tau}(C, \varepsilon) := & 1_{\{\tau=\tau_C < \tau_I\}} \left(\varepsilon_{I,\tau} - \text{LGD}_C (\varepsilon_{I,\tau}^{+} - C_{\tau-}^{+})^{+} - \text{LGD}'_C (\varepsilon_{I,\tau}^{-} - C_{\tau-}^{-})^{+} \right) \\
 & + 1_{\{\tau=\tau_I < \tau_C\}} \left(\varepsilon_{C,\tau} - \text{LGD}_I (\varepsilon_{C,\tau}^{-} - C_{\tau-}^{-})^{-} - \text{LGD}'_I (\varepsilon_{C,\tau}^{+} - C_{\tau-}^{+})^{-} \right)
 \end{aligned}$$

Possibili semplificazioni del framework

Bid-Ask spread su collaterale e funding rate

Se bid/ask di collateral ampio allora presumibilmente anche bid/ask sottostante ampio

$$c_t = c_t^- = c_t^+$$

Collateral accrual

Margin account remunerato a EONIA flat (ovvero punto di attacco della curva OIS)

$$c_t = r_t$$

Funding rate

Funding rate simmetrico (tesoreria centro di servizi / tasso di borrow e lending unico)

$$f_t = f_t^- = f_t^+$$

Funding rate legato alla default intensity dell'investitore

$$f_t = r_t + \lambda(1 - R_I)$$

Re-hypothecation

Stessa recovery su collateral e derivato

$$\begin{aligned} \theta_\tau(C, \varepsilon) &:= \varepsilon_\tau \\ &- 1_{\{\tau=\tau_C < \tau_I\}} \text{LGD}_C(\varepsilon_{I,\tau} - C_{\tau-})^+ \\ &- 1_{\{\tau=\tau_I < \tau_C\}} \text{LGD}_I(\varepsilon_{C,\tau} - C_{\tau-})^- \end{aligned}$$

(oppure: no-rehypothecation -> LGD' = 0)

Flussi di funding, collateral, close-out, per il periodo (t_j, t_{j+1}) dipendono dal valore del derivato (non noto) a *inizio* periodo. Si arriva a una equazione ricorsiva:

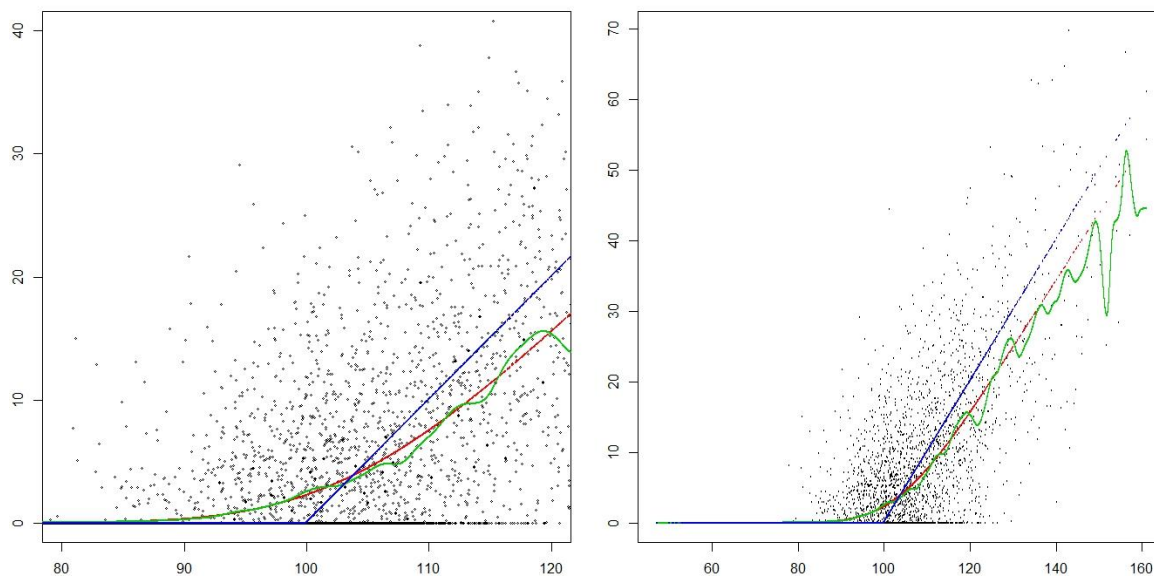
$$\begin{aligned} \bar{V}_{t_j}(C; F) = & \mathbb{E}_{t_j} \left[\bar{V}_{t_{j+1}}(C; F) D(t_j, t_{j+1}) + \Pi(t_j, t_{j+1} \wedge \tau) + \gamma(t_j, t_{j+1} \wedge \tau; C_{t_j}) \right. \\ & \left. + 1_{\{t_j < \tau < t_{j+1}\}} D(t_j, \tau) \theta_\tau(C_{t_j}; \varepsilon) + 1_{\{\tau > t_j\}} \varphi(t_j, t_{j+1} \wedge \tau; F_{t_j}) \right] \end{aligned}$$

Framework PPB – Problema Ricorsivo – Least Squares Monte Carlo

Problema ricorsivo: l'accrual del Collateral account C_t , l'accrual del Funding account F_t tra t e $t+dt$ ed il close-out amount $\bar{\theta}_t$ (a parte il caso di risk-free close-out) dipende da \bar{V}_t

Come determinare \bar{V}_t dato un set di simulazioni Monte Carlo?

- Problema analogo: approssimazione della early-exercise boundary di una opzione Americana (Least Squares Monte Carlo)
- Attenzione alle basi (nel Funding account entra il delta)



Framework Pallavicini Perini Brigo (2011) effettivamente significativamente più complesso rispetto al framework Burgard and Kjaer (2012) ma è l'approccio più generale e realistico possibile

1. Derivati perfettamente collateralizzati (marginazione continua, senza independent amount, senza threshold e minimum transfer amount, senza grace period, con re-hypothecation)
Risk neutral pricing
2. Derivati senza collateralizzazione
Framework Burgard and Kjaer (2012): B-S modificato con funding-account al posto del cash-account
3. Terra di mezzo
Framework Pallavicini Perini Brigo (2011): particolarmente adatto a valutare:
 - Presenza di clausole di re-hypothecation sul collaterale
 - Payoff path-dependent (not PDE friendly) o multi-asset (netting set)
 - Collateralizzazione non perfetta (marginazione non bilaterale, bassa frequenza delle margin call, independent amount / threshold / minimum transfer amount / grace period significativi)

Funding rate simmetrico

La regolamentazione indica la tesoreria come centro di servizi e non di profitto

- Ciononostante vi è una certa varietà di transfer pricing policies da banca a banca

Possibile policy (tasso unico):

- Giornalmente la tesoreria verifica lo sbilancio e si finanzia esternamente.
- Tutta la cassa nel corso della giornata (lunga e corta) viene remunerata a questo stesso tasso: interbancario offer dell'investitore.

Quindi la ipotesi $f_t = r_t + \lambda(1 - R_f)$ ragionevole stante che:

- le banche di investimento sono strutturalmente corte liquidità (non hanno raccolta e devono finanziare il magazzino titoli).
 - in questo modo si può evitare la ulteriore complicazione di tenere conto della non linearità della soluzione
 - nei rari casi in cui c'è un eccesso di liquidità questo viene investito al risk free (ovvero le politiche di tesoreria prevedono regole conservative per gli impieghi).
- la regolamentazione impone un vincolo di raccolta oltre il mese (quindi non tutto il borrowing può essere fatto overnight).
 - ad ogni giorno si calcola un tasso medio ponderato di raccolta sulle varie scadenze e lo si applica a tutti i trade (il rischio tasso della tesoreria è hedged con OIS swap quindi si locka lo spread su EONIA).

XVA e controversia DVA

Partita doppia di un derivato

Profit	Losses
Fee DVA	Funding costs CVA KVA (rischio mercato, rischio controparte) costi diretti (wage, blb, ...) costi indiretti
Net Profit ROE (su capitale allocato)	

- XVA: approccio analitico oppure Fee target per realizzare (ex-post) budget target
 - requisito incrementale (e conseguente costo del capitale) derivante da contribuzione marginale al rischio di mercato, credito, controparte
- natura controversa del DVA
 - Dal punto di vista della controparte non vi è differenza tra equity holder (going concern) e bond holder (gone concern)

Esempio

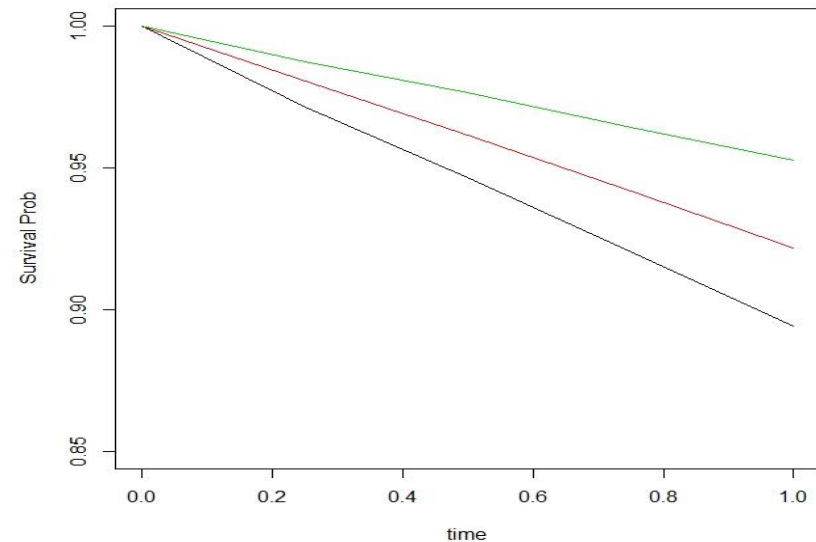
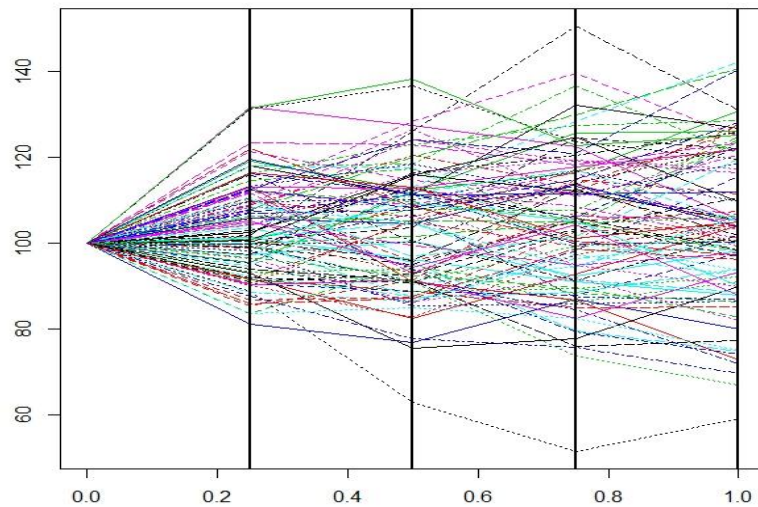
Forward w/ floor (long put) e cap (short call)

Payoff: $(S_T - K_0) + (S_T - K_2)_+ - (K_1 - S_T)_+$

Parametri: $S_0 = 100, K_0 = 100, K_1 = 90, K_2 = 120, \sigma = 0.2, T = 1, r_f = 0.02, d = 0.01$

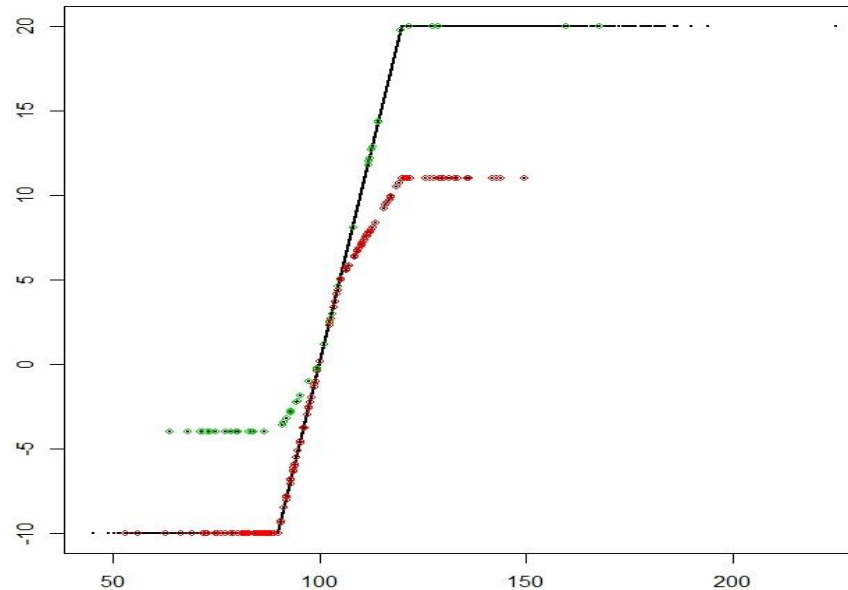
Credit: $\lambda_C = 0.08, \lambda_I = 0.03, R_C = R_I = 0.4, \rho = 0.6, C_0 = 5, r_C = r_f - 0.001, r_F = r_f + \lambda_I(1 - R_I)$

Time grid trimestrale e copula gaussiana per simulare i tempi di default (arrivi a fine trimestre) di investitore e controparte



Esempio

Payoff a scadenza ($t=1$) assumendo che i default arrivino un attimo prima della fine del trimestre:
rosso: default controparte, verde: default investitore, nero: survival di entrambi



Muovendosi indietro nel tempo ($t = 0.75, 0.5, 0.25, 0$) dobbiamo interpolare la mappa $\{S_t^{(i)}; \bar{V}_{t+1}^{(i)}\}$ per

- valorizzare collateral account (nel caso di marginazione periodica) all'inizio del periodo
- valorizzare il funding account (delta calcolato via finite difference) all'inizio del periodo
- valorizzare il close-out (replacement transaction con stessi parametri)

Esempio

Kernel smooth gaussiano per interpolare il valore del derivato $\bar{V}_t^{(i)}$ data la mappa $\{S_t^{(i)}; \bar{V}_{t+1}^{(i)}\}$

Dato $\bar{V}_t^{(i)}$ valorizziamo la matrice di payoff relativa all'intervallo $[t, t + dt)$

- accrual del collateral account
- accrual del funding account (hedge ratio dato dal finite difference di $\bar{V}_t^{(i)}$)
- close-out amount per i path dove $\tau_I \wedge \tau_C \in [t, t + dt)$

Il valore del derivato al tempo $t + dt < \tau_I \wedge \tau_C$ per il path i-esimo è il valore scontato dei flussi futuri

Semplifichiamo per un attimo il set-up

Parametri: $r_f = d = 0, C_0 = 0, r_F = r_f$

	$S_t^{(i)}$				
	0	0,25	0,5	0,75	1
1	100	111	106	109	107
2	100	98	104	102	106
3	100	97	95	99	102
4	100	102	98	101	99
5	100	105	101	103	98

	Cashflow				
	0	0,25	0,5	0,75	1
1					7
2			1,2		
3					2
4		-1,2			
5					-2

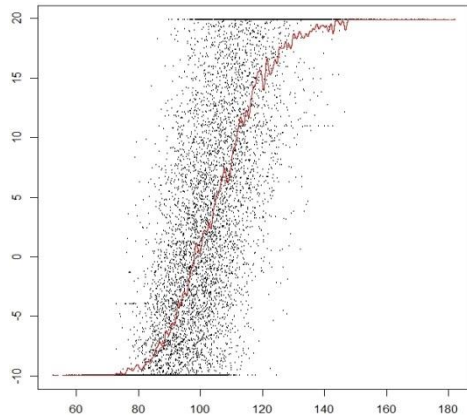
	$V_t^{(i)}$				
	0	0,25	0,5	0,75	1
1	7	7	7	7	7
2	1,2	1,2	1,2	1,2	
3	2	2	2	2	2
4	-1,2	-1,2	-1,2		
5	-2	-2	-2	-2	-2

Esempio

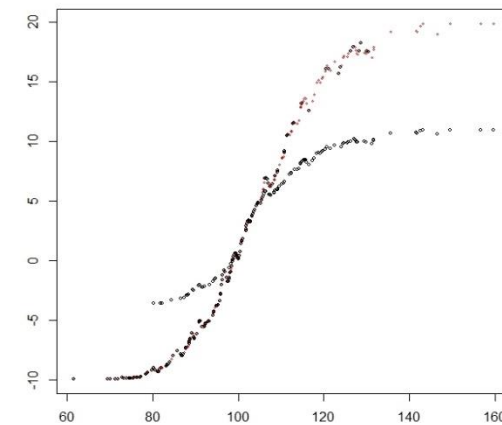
Attenzione alla bandwidth: al diminuire della bandwidth migliora il fit sul corpo ma diventa erratico sulla coda con grossi impatti sul delta

$$\{S_t^{(i)} ; \bar{V}_{t+1}^{(i)}\}$$

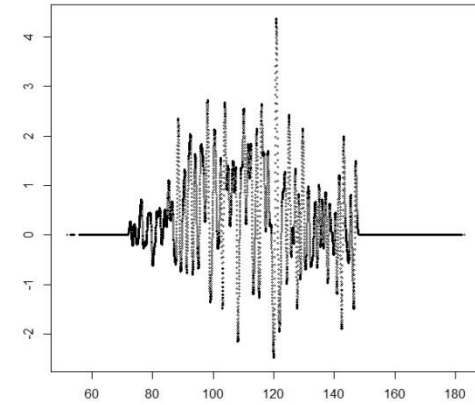
bw=1



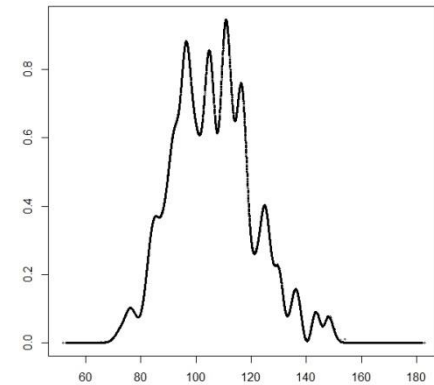
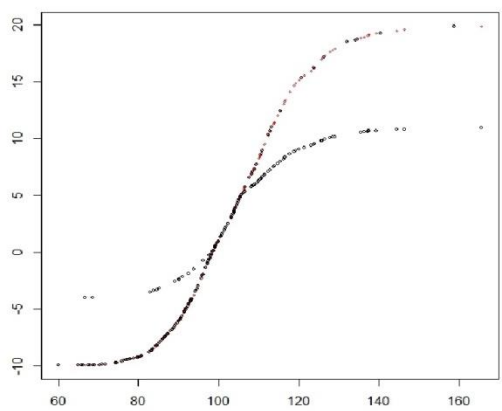
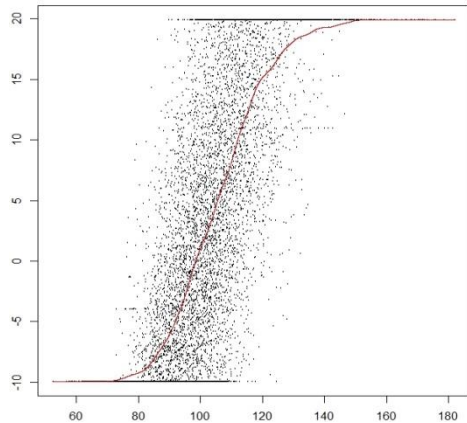
$$\{S_t^{(i)} ; \theta_{t+1}^{(i)}\}$$



$$\{S_t^{(i)} ; \Delta_t^{(i)} = H_t^{(i)} / S_t^{(i)}\}$$



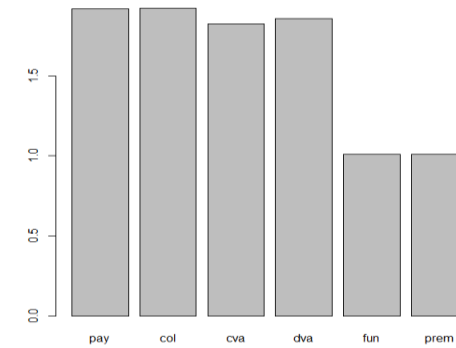
bw=5



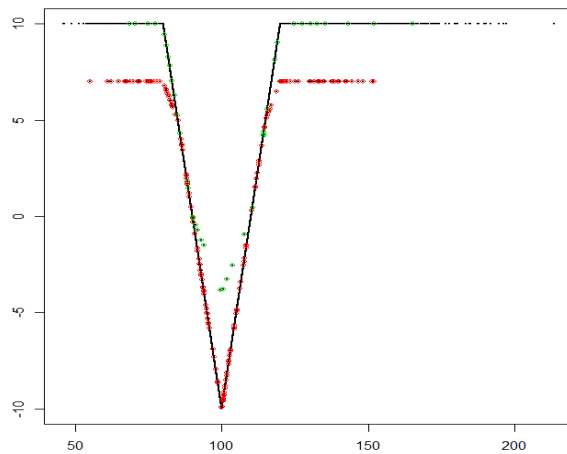
Esempio

Contributi marginali al premio: impatto significativo del Funding in virtù del delta

prem	pay	col	cva	dva	fun
1.012	1.917	0.005	-0.097	0.033	-0.846



Payoff alternativo (delta circa zero): contributi marginali molto differenti



prem	2.564
pay	2.528
col	0.005
cva	-0.029
dva	0.007
fun	0.054

